Fiche pédagogique — Racines carrées (3ᵉ AC)

Établissement : ...

Enseignant(e) : ...

Niveau : 3ᵉ année collégiale

Discipline : Mathématiques — Nombres et calculs

Durée indicative : 2 à 3 séances de 55 min

Compétences visées :

- Comprendre la notion de racine carrée d'un nombre réel positif.
- Utiliser les propriétés des racines carrées pour simplifier et calculer.
- Encadrer et approximer des racines carrées.
- Comparer des nombres impliquant des racines carrées.
- Résoudre des problèmes mobilisant les racines carrées (dont Pythagore).

Prérequis

- Carrés parfaits et puissances (n^2 pour $n \in \mathbb{N}$).
- Produit/quotient de nombres réels, fractions irréductibles.
- Valeur absolue et notion de « nombre positif / négatif ».
- Utilisation raisonnée de la calculatrice.

Matériel

- Calculatrice (mode réel), tableau de carrés parfaits (1^2 à 20^2), affiches A3/feutres pour travail de groupe.

Vocabulaire/Notations (FR/AR)

- Racine carrée ($\sqrt{a}$) — الجذر التربيعي
- Carré parfait — مربع كامل
- Radical/radicande — الجذر/المجذور
- Approximation/encadrement — تقريب/إحاطة
- Propriétés : $\sqrt{(ab)}$, $\sqrt{(a/b)}$, $\sqrt{(a^2)}=|a|$ pour a réel.

Séance 1 (55 min) — Découverte et définition

1) Situation-problème (10 min)

On veut construire un carré d'aire **50 cm²**. Quelle est la longueur de son côté ?

Élèves : « le côté = $\sqrt{50}$ ». Faire émerger le besoin d'un nouveau nombre.

2) Institutionnalisation (15 min)

- **Définition** : Pour **$a \geq 0$**, **$\sqrt{a}$** est le **nombre réel positif** dont le carré vaut **a**.
- **Exemples :** $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{(1/4)}=1/2$.
- **Attention :** $\sqrt{(a^2)}=|a|$, pas « a » (ex. $\sqrt{((-3)^2)}=3$).
- **Non défini dans ℝ** pour $a<0$ (on le signale sans développer les nombres complexes).

3) Propriétés utiles (15 min)

Pour **$a, b \geq 0$** et **$b \neq 0$** :

- $\sqrt{(ab)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
- $\sqrt{(a/b)}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

  Applications :
- $\sqrt{50} = \sqrt{(25\times2)} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{(27/3)} = \sqrt{9} = 3$

4) Encadrement et approximation (10 min)

- Encadrer $\sqrt{a}$ entre deux entiers consécutifs n et n+1 tels que $n^2 \leq a < (n+1)^2$.
- Exemple : $7^2=49 < 50 < 64=8^2 \Rightarrow$ **$7 < \sqrt{50} < 8$**.
- Calculatrice pour une valeur approchée : $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ (au 1/100).
- Rappel des écritures : ≈ (approché), ≃ (approx. « arrondi »), <, ≤.

5) Mini-quiz flash (5 min)

1. Vrai/Faux : $\sqrt{(36)}=\pm6$. (Faux, c'est 6 ; l'équation $x^2=36$ a deux solutions ±6.)
2. Compléter : $\sqrt{(a^2)}=\ldots$ ($|a|$)
3. Simplifier : $\sqrt{(72)} = 6\sqrt{2}$.

Séance 2 (55 min) — Calculs, comparaisons et problèmes

1) Calculs/simplifications (15 min)

- Exemples guidés :

  a) $\sqrt{(45)} = 3\sqrt{5}$

  b) $\sqrt{(8/18)} = \sqrt{(4\times2)}/\sqrt{(9\times2)} = 2/3$

  c) $\sqrt{(12)}+\sqrt{(27)} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

2) Comparer des nombres avec racines (10 min)

- Stratégies :

  • Approcher numériquement.

  • Mettre sous forme $k\sqrt{m}$ et comparer les k^2m.

  • Élever au carré (avec prudence si tous les termes sont ≥ 0).

- Exemples :

  a) Comparer $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{7}$: $3^2\cdot5=45$; $2^2\cdot7=28 \Rightarrow 3\sqrt{5} > 2\sqrt{7}$.

  b) $\sqrt{18}$ et 4 : $\sqrt{18}\approx4{,}24 \Rightarrow \sqrt{18} > 4$ (erreur fréquente : croire que $\sqrt{18}<4$ car $18<16$).

3) Problèmes (20 min)

- **Géométrie (Pythagore)** : dans un triangle rectangle, si les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm, l'hypoténuse vaut $\sqrt{(6^2+8^2)}=\sqrt{100}=10$ cm.
- **Aire et côté d'un carré** : aire 98 cm² $\Rightarrow$ côté $= \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ cm.
- **Distance dans un repère** (optionnel) : distance entre A(1,2) et B(5,9) : $\sqrt{((5-1)^2+(9-2)^2)}=\sqrt{(16+49)}=\sqrt{65}$.

4) Trace écrite/Leçon (10 min)

Synthèse des définitions, propriétés, méthodes d'encadrement et de comparaison + un tableau des carrés parfaits.

Séance 3 (55 min, selon besoin) — Approfondissement & remédiation

- **Approfondissement (forts)** :

  • Rationaliser un dénominateur simple : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

  • Comparaisons fines sans calculatrice.

  • Problèmes ouverts (optimisation simple d'aire/périmètre).

- **Remédiation (difficultés)** :

  • Revenir sur carrés parfaits ($1^2\rightarrow20^2$).

  • Exercices « Vrai/Faux » ciblant les confusions $\sqrt{(a^2)}=a$.

  • Encadrements systématiques.

Erreurs fréquentes à prévenir

- Écrire **√(36)=±6** (confusion avec solutions de $x^2=36$).
- Oublier la valeur absolue : **√(a²)=|a|**.
- Tenter √(a+b)=√a+√b (faux), √(a−b)=√a−√b (faux).
- Simplifier partiellement : **√(20)=2√5** (pas **√20=√4+√16**).

Exercices (classe/devoir) avec corrigé

Série A — Application directe

1. Simplifier :

   a) √(75) b) √(12/27) c) 4√8 − √32

   Corrigé : a) 5√3 ; b) √(4×3)/√(9×3)=2/3 ; c) 4·2√2 − 4√2 = 4√2.

2. Encadrer puis approximer au 1/100 :

   a) √5 b) √22 c) √90

   Corrigé (≈) : a) 2,24 ; b) 4,69 ; c) 9,49.

3. Comparer sans calculatrice (justifier) :

   a) 3√2 et 2√3 b) √45 et 7

   Corrigé : a) $3^2 \cdot 2=18$; $2^2 \cdot 3=12 \Rightarrow 3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

   b) √45≈6,708 < 7.

Série B — Problèmes

4. Un carré a pour périmètre 28 cm. Son aire ?

   Sol. : côté = 7 cm ⇒ aire = 49 cm².

5. Triangle rectangle en A : AB=9 cm, AC=12 cm. Calculer BC.

   Sol. : $BC=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{225}=15$ cm.

6. Un jardin rectangulaire 5 m × 9 m. Diagonale ?

   Sol. : √(25+81)=√106 ≈ 10,30 m.

Série C — Approfondissement

7. Écrire sous la forme $k\sqrt{m}$ (m sans facteur carré) :

   a) √(108) b) 2√(27) + 3√(12)

   Sol. : a) 6√3 ; b) 2·3√3 + 3·2√3 = 12√3.

8. Rationaliser : $\frac{5}{\sqrt{2}}$ et $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

   Sol. : $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Évaluation (contrôle rapide 15–20 min)

1. Compléter : $\sqrt{(a^2)}=\ldots$; $(\sqrt{a})^2=\ldots$ ($|a|$; a).
2. Simplifier : $\sqrt{(200)} - 3\sqrt{(8)} + \sqrt{(50)}$.
3. Encadrer $\sqrt{37}$.
4. Problème : carré d'aire 72 cm² → côté ? périmètre ?

   Barème indicatif (10 pts) : Q1 (2), Q2 (3), Q3 (2), Q4 (3).

   Indications de correction :
5. $\sqrt{200}=10\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$; $\sqrt{50}=5\sqrt{2} \Rightarrow (10-6+5)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.
6. $6^2=36<37<49=7^2 \Rightarrow 6<\sqrt{37}<7$ ($\approx 6{,}08$).
7. côté$=\sqrt{72}=6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm ; périmètre $\approx 33{,}94$ cm.

Différenciation & inclusion

- **Aide** : fiches « mémo » (carrés parfaits, propriétés), binômes hétérogènes, étapes guidées.
- **Enrichissement** : défis « sans calculatrice », problèmes de distance/diagonales, rationalisation.
- **Évaluation formative** : ardoises, quiz 3 items (V/F), auto-correction par code couleur.

Trace écrite (à coller dans le cahier)

1. Pour $a\geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre réel **positif** dont le carré vaut a.
2. Propriétés ($a,b\geq 0$) : $\sqrt{(ab)}=\sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{(a/b)}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$; $\sqrt{(a^2)}=|a|$.
3. Méthodes : simplifier en extrayant les facteurs carrés ; encadrer entre deux carrés parfaits ; comparer via k^2m ou approximation.

Tableau des carrés parfaits (utile en classe)

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$,
$11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$, $15^2=225$, $16^2=256$, $17^2=289$, $18^2=324$, $19^2=361$, $20^2=400$.

Prolongements (lien inter-chapitres)

- Théorème de Pythagore, distance dans le plan, échelles/aires, introductions aux irrationnels ($\sqrt{2}$).